nisse	Evaluation Premier Semestre Mathématiques	Niveau : 1bac SM Durée : 2 h Date : 28/12/2018

Exercice1 (7,5 points) :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in IN)$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

1 — 1) Montrer que : $(\forall n \in IN)$ $1 < u_n \prec 3$.

0,5 — 2) a- Vérifier que : $(\forall n \in IN)$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(2+u_n)}{u_n + 4}$

1 — b- Déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in IN}$.

3) Soit $(v_n)_{n\in IN}$ la suite numérique définie par : $(\forall n \in IN)$ $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

1 — a- Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{5}$.

1,5 — b- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

3) On pose : $\forall n \in IN$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{3}{u_k + 2}$.

1 — a- Déterminer S_n en fonction de n .

0 ,5 — b- Vérifier que : $(\forall n \in IN)$ $1 - v_n = \dfrac{3}{u_n + 2}$

1 — c- Déduire l'expression de T_n en fonction de n .

Exercice2 (2 points) :

On considère l'application

$$f : IR^2 \longrightarrow IR^2$$
$$(x;y) \longmapsto (3x - y; x - 3y)$$

1,5+0,5 — Montrer que l'application f est bijective , et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice3 : (7 points) :

On considère l'application

$$f : IR^+ \longrightarrow IR$$
$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$$

0,5 — 1) a- Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$, n'admet pas de solution dans IR^+ .

0,5 — b- f est-elle surjective ?

1 — c- Montrer que f est injective .

2) On considère l'application

$$g : IR^+ \longrightarrow \left[-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right[$$
$$x \longmapsto \frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$$

0,5 + 1 — a- Vérifier que : $(\forall x \in IR^+)$ $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x} + 1}$, et déduire que $g^{-1}\left(\left[-\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{6}\right]\right) = \left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

1,5 — b-Montrer que : $g(IR^+) = \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right[$.

1 + 1 — c- Déduire que l'application g est bijective , et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} .

Exercice4 (3,5 points) :

Soient A et B deux parties non vide d'un ensemble E

On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$

$$X \longmapsto (X \cup A ; X \cup B)$$

1 1) a- Calculer $f(\phi)$ et $f(A \cap B)$

1,5 b- Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \phi$.

1 2) Montrer que f n'est pas surjective .